第 3 节 a_n 与 S_n 混搭的处理（★★★）

强化训练

1．（2023・广东广州模拟・★）数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2+n+1$，则 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=$______.

答案：$\begin{cases}3,n=1\\2n,n\ge 2\end{cases}$

解析：已知 S_n 求 a_n，用 $a_n=\begin{cases}S_1,n=1\\S_n-S_{n-1},n\ge 2\end{cases}$ 计算即可，

因为 $S_n=n^2+n+1$，所以 $a_1=S_1=3$；

当 $n\ge 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n+1-[(n-1)^2+(n-1)+1]=2n$；所以 $a_n=\begin{cases}3,n=1\\2n,n\ge 2\end{cases}$.

2．（2023・湖南模拟・★★★）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $\frac{2}{3}S_n=a_n-\frac{2}{3}n-2$.

（1）求证：数列 $\{a_n+1\}$ 是等比数列；

（2）若 $b_n=\frac{1}{a_n+1}$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求证：$T_n<\frac{1}{6}$.

解：(1)（所给关系式中 S_n 与 a_n 混搭，要证的是 $\{a_n+1\}$ 为等比数列，故退 n 相减，消去 S_n）

因为 $\frac{2}{3}S_n=a_n-\frac{2}{3}n-2$，所以 $\frac{2}{3}S_1=\frac{2}{3}a_1=a_1-\frac{2}{3}-2$，解得：$a_1=8$，

当 $n\ge 2$ 时，$\frac{2}{3}S_{n-1}=a_{n-1}-\frac{2}{3}(n-1)-2$，所以 $\frac{2}{3}S_n-\frac{2}{3}S_{n-1}=a_n-\frac{2}{3}n-2-[a_{n-1}-\frac{2}{3}(n-1)-2]$，

从而 $\frac{2}{3}a_n=a_n-a_{n-1}-\frac{2}{3}$，故 $a_n=3a_{n-1}+2$ ①，

（要证 $\{a_n+1\}$ 是等比数列，只需证 $\forall n\ge 2$，$\frac{a_n+1}{a_{n-1}+1}$ 为常数，可先由式①凑出 a_n+1 和 $a_{n-1}+1$）

在式①两端加 1 可得：$a_n+1=3a_{n-1}+2+1=3(a_{n-1}+1)$ ②，

又 $a_1+1=8+1=9\ne 0$，结合式②知数列 $\{a_n+1\}$ 所有项均不为 0，所以 $\frac{a_n+1}{a_{n-1}+1}=3$，

故 $\{a_n+1\}$ 是首项为 9，公比为 3 的等比数列.

（2）由（1）得 $a_n+1=9\times 3^{n-1}=3^{n+1}$，故 $b_n=\frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{3^{n+1}}$，

（显然数列 $\{b_n\}$ 是等比数列，故直接求和，再证不等式）

所以 $T_n=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^{n+1}}=\frac{\frac{1}{9}[1-(\frac{1}{3})^n]}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\times(\frac{1}{3})^n<\frac{1}{6}$.

3．（2022·新高考Ⅰ卷·★★★）记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=1$，$\left\{\dfrac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\dfrac{1}{3}$ 的等差数列.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）证明：$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<2$.

解：（1）（先翻译已知条件，将 $\dfrac{S_n}{a_n}$ 整体求出，得到 S_n 与 a_n 混搭的关系式）

由题意，$\dfrac{S_1}{a_1}=\dfrac{a_1}{a_1}=1$，数列 $\left\{\dfrac{S_n}{a_n}\right\}$ 是首项为 1，公差为 $\dfrac{1}{3}$ 的等差数列，

所以 $\dfrac{S_n}{a_n}=1+(n-1)\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{n+2}{3}$，故 $3S_n=(n+2)a_n$，（要求的是 a_n，故考虑退 n 相减，消去 S_n）

所以当 $n\ge 2$ 时，$3S_{n-1}=(n+1)a_{n-1}$，从而 $3S_n-3S_{n-1}=(n+2)a_n-(n+1)a_{n-1}$，故 $3a_n=(n+2)a_n-(n+1)a_{n-1}$，

整理得：$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n+1}{n-1}$，（看到 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=f(n)$ 这种结构，想到用累乘法求 a_n）

所以当 $n\ge 2$ 时，$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{3}{1}$，$\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{4}{2}$，$\dfrac{a_4}{a_3}=\dfrac{5}{3}$，…，$\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\dfrac{n}{n-2}$，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n+1}{n-1}$，

以上各式累乘可得 $\dfrac{a_n}{a_1}=\dfrac{3}{1}\times\dfrac{4}{2}\times\dfrac{5}{3}\times\cdots\times\dfrac{n}{n-2}\times\dfrac{n+1}{n-1}=\dfrac{n(n+1)}{2}$，结合 $a_1=1$ 可得 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，

又 $a_1=1$ 也满足上式，所以 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

（2）由（1）可得 $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{2}{n(n+1)}=2(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$，

所以 $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}=2(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})=2-\dfrac{2}{n+1}<2$.

4．（2023·广西桂林模拟·★★★）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，$S_n=a_{n+1}-2^n$.

（1）证明：数列 $\left\{\dfrac{S_n}{2^n}\right\}$ 为等差数列；

（2）求 a_n.

解：（1）（要证的是与 S_n 有关的结论，故在 $S_n=a_{n+1}-2^n$ 中将 a_{n+1} 代换成 $S_{n+1}-S_n$，消去 a_{n+1}）

因为 $S_n=a_{n+1}-2^n$，所以 $S_n=S_{n+1}-S_n-2^n$，整理得：$S_{n+1}=2S_n+2^n$ ①，

（要证 $\left\{\dfrac{S_n}{2^n}\right\}$ 为等差数列，只需证 $\dfrac{S_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{S_n}{2^n}$ 为常数，故先由上式凑出 $\dfrac{S_{n+1}}{2^{n+1}}$ 这种结构）

由①两端同除以 2^{n+1} 得：$\dfrac{S_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{2S_n}{2^{n+1}}+\dfrac{2^n}{2^{n+1}}$，整理得：$\dfrac{S_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{S_n}{2^n}=\dfrac{1}{2}$，所以 $\left\{\dfrac{S_n}{2^n}\right\}$ 为等差数列.

（2）（由上一问证得的结论可先求出 S_n，再求 a_n）

由（1）可得 $\dfrac{S_n}{2^n}=\dfrac{S_1}{2^1}+(n-1)\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{n-1}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{n-1}{2}=\dfrac{n}{2}$，所以 $S_n=n\cdot 2^{n-1}$，

故当 $n\ge 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n\cdot 2^{n-1}-(n-1)\cdot 2^{n-2}=2n\cdot 2^{n-2}-(n-1)\cdot 2^{n-2}=(n+1)\cdot 2^{n-2}$，

又 $a_1=1$ 也满足上式，所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=(n+1)\cdot 2^{n-2}$.

5．（2023 • 河北模拟改 • ★★★）数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{4}+\frac{a_3}{8}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}=3-\frac{2n+3}{2^n}$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）记 $M=a_2+a_5+a_8+\cdots+a_{59}$，求 M 的值.

解：（1）（观察发现所给等式左侧是数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和，可先由通项与前 n 项和的关系求出 $\frac{a_n}{2^n}$）

设 $c_n=\frac{a_n}{2^n}$，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 P_n，则 $\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{4}+\frac{a_3}{8}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}=3-\frac{2n+3}{2^n}$ 即为 $P_n=3-\frac{2n+3}{2^n}$，

所以当 $n\ge 2$ 时，$c_n=P_n-P_{n-1}=3-\frac{2n+3}{2^n}-[3-\frac{2(n-1)+3}{2^{n-1}}]=\frac{2(n-1)+3}{2^{n-1}}-\frac{2n+3}{2^n}=\frac{4n+2}{2^n}-\frac{2n+3}{2^n}=\frac{2n-1}{2^n}$；

又 $c_1=P_1=\frac{1}{2}$ 也满足上式，所以 $c_n=\frac{2n-1}{2^n}(n\in\mathbf{N}^*)$，即 $\frac{a_n}{2^n}=\frac{2n-1}{2^n}$，故 $a_n=2n-1$.

（2）（写出数列 $a_2,a_5,a_8,\cdots$ 的前几项依次为 3，9，15，…，可以发现它们构成公差为 6 的等差数列. 作为解答题，我们先论证这一结果，再代公式求和）

设 $b_n=a_{3n-1}$，则 $b_n=2(3n-1)-1=6n-3$，所以 $b_{n+1}-b_n=6(n+1)-3-(6n-3)=6$，故 $\{b_n\}$ 是等差数列，

所以 $M=a_2+a_5+a_8+\cdots+a_{59}=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{20}=\frac{20\times(b_1+b_{20})}{2}=10\times(3+117)=1200$.

6.（2022 •四川成都七中模拟 •★★★）已知数列 $\{a_n\}$ 为非零数列，且满足 $(1+\frac{1}{a_1})(1+\frac{1}{a_2})\cdots(1+\frac{1}{a_n})=(\frac{1}{2})^{n(n+1)}$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\left\{\frac{1}{a_n}+n\right\}$ 的前 n 项和 S_n.

解：（1）（所给等式左侧为数列 $\left\{1+\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项积，已知前 n 项积，可先求出通项）

由题意，$(1+\frac{1}{a_1})(1+\frac{1}{a_2})\cdots(1+\frac{1}{a_n})=(\frac{1}{2})^{n(n+1)}$ ①，所以 $1+\frac{1}{a_1}=\frac{1}{4}$，解得：$a_1=-\frac{4}{3}$；

当 $n\ge 2$ 时，$(1+\frac{1}{a_1})(1+\frac{1}{a_2})\cdots(1+\frac{1}{a_{n-1}})=(\frac{1}{2})^{(n-1)n}$ ②，

用式①除以式②可得：$1+\frac{1}{a_n}=\frac{(\frac{1}{2})^{n(n+1)}}{(\frac{1}{2})^{(n-1)n}}=(\frac{1}{2})^{2n}=(\frac{1}{4})^n$，所以 $a_n=\frac{1}{(\frac{1}{4})^n-1}=\frac{4^n}{1-4^n}$；

又 $a_1=-\frac{4}{3}$ 也满足上式，所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=\frac{4^n}{1-4^n}$.

（2）由（1）可得 $\frac{1}{a_n}+n=(\frac{1}{4})^n+n-1$，（该通项由两部分相加构成，可分别求和再相加）

所以 $S_n=(\frac{1}{4})^1+0+(\frac{1}{4})^2+1+\cdots+(\frac{1}{4})^n+n-1=[(\frac{1}{4})^1+(\frac{1}{4})^2+\cdots+(\frac{1}{4})^n]+[0+1+\cdots+(n-1)]$

$$=\frac{\frac{1}{4}[1-(\frac{1}{4})^n]}{1-\frac{1}{4}}+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{1}{3}[1-(\frac{1}{4})^n]+\frac{n(n-1)}{2}.$$

7.（2021·全国乙卷·★★★）记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，b_n 为数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项积，已知 $\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$.

（1）证明：数列 $\{b_n\}$ 为等差数列；

（2）求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解：(1)（b_n 是 $\{S_n\}$ 的前 n 项积，要证的是 $\{b_n\}$ 为等差数列，故可由 $S_n=\frac{b_n}{b_{n-1}}(n\ge 2)$ 消去 S_n）

因为 b_n 为数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项积，所以当 $n\ge 2$ 时，$S_n=\frac{S_1S_2\cdots S_{n-1}S_n}{S_1S_2\cdots S_{n-1}}=\frac{b_n}{b_{n-1}}$，

代入 $\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$ 得：$\frac{2}{\frac{b_n}{b_{n-1}}}+\frac{1}{b_n}=2$，整理得：$b_n-b_{n-1}=\frac{1}{2}$，故数列 $\{b_n\}$ 是公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列.

(2)（要求 a_n，可先由第（1）问证得的结果求出 b_n，再代入 $\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$ 求 S_n，进而得到 a_n）

由题意，$b_1=S_1=a_1$，且在 $\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$ 中取 $n=1$ 得：$\frac{2}{S_1}+\frac{1}{b_1}=2$，所以 $b_1=S_1=a_1=\frac{3}{2}$，

结合（1）有 $b_n=\frac{3}{2}+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{n+2}{2}$，代入 $\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$ 可求得 $S_n=\frac{n+2}{n+1}$，

（接下来就是已知 S_n 求 a_n 的问题了，a_1 已求出，只需由 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 求出 $n\ge 2$ 时的结果即可）

所以当 $n\ge 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n+2}{n+1}-\frac{n+1}{n}=-\frac{1}{n(n+1)}$，故 $a_n=\begin{cases}\frac{3}{2},n=1\\-\frac{1}{n(n+1)},n\ge 2\end{cases}$.